



# Les fractions et les nombres décimaux Cycle 3

- Animation du mercredi 28 septembre  
2013

# L'objectif de la démarche

- Améliorer les apprentissages mathématiques des élèves dans le domaine des fractions et des nombres décimaux et vaincre la permanence des difficultés des élèves dans leur compréhension des fractions et des nombres décimaux .

# Quelle permanence des difficultés ?

- « *Par rapport à 7, quel est le nombre le plus proche : 6,9 ou 7,08 ?* »

Classe	CM1	CM2	6 <sup>e</sup>	5 <sup>e</sup>
Réussite	22%	30%	27%	29%

# La double problématique

- **Comment faire surmonter aux élèves les difficultés rencontrées lors de la découverte des nombres décimaux ?**
- **Comment faire progresser les élèves dans leur conceptualisation des fractions et des nombres décimaux ?**

# Plan de l'animation

- I. Les difficultés
- II. Les contraintes
- III. Les réponses



# 1. Les difficultés mathématiques

- La **notion de successeur ou de prédécesseur** n'a pas de sens : entre deux décimaux on peut toujours en intercaler autant que l'on veut.
- Les **règles de comparaison**, propres aux décimaux, ne sont pas les mêmes que pour les entiers : il ne s'agit pas de considérer la fraction ou le nombre décimal comme un couple d'entiers.
- Le **sens des opérations** est à reconsidérer pour la multiplication et de la division : l'utilisation du signe « x » ne signifie pas l'agrandissement et l'utilisation du signe « : » ne signifie pas que l'on est dans une situation de réduction. De plus **tout quotient peut être approché d'aussi près que l'on veut.**





- Les élèves confondent partage égalitaire et partage non égalitaire.
- Les élèves ne prennent pas en compte l'unité donnée pour écrire la fraction d'une représentation géométrique donnée (le plus souvent dans le cadre de fractions supérieures à 1).
- Les élèves confondent l'écriture fractionnaire et le nombre qu'elle représente.
- Les élèves ne prennent pas en compte l'échelle donnée pour lire la graduation d'un point sur une droite graduée.
- Les élèves ne respectent pas la nécessité d'un partage à parts égales pour placer un nombre sur une droite graduée.
- Les élèves pensent que les deux parties d'une fraction sont indépendantes.
- Les élèves ne savent pas lire une fraction.
- Les élèves ne savent pas écrire une fraction.
- Les élèves ne savent pas reconnaître l'égalité de deux fractions.
- Les élèves ne savent pas comparer deux fractions.
- Les élèves confondent l'écriture  $a/b$  et  $a.b$ .
- Les élèves identifient tout nombre à virgule à un nombre décimal sans comprendre que la partie après la virgule doit être finie.
- Les élèves n'admettent pas qu'un nombre entier est un nombre décimal.
- Les élèves n'admettent pas qu'un nombre écrit sous forme de fractions décimales est un nombre décimal.
- Les élèves n'appliquent pas le système de la numération de position aux chiffres après la virgule (exemple : après 3,9 on trouve 3,10 puis 3,11 etc...)
- Les élèves appliquent aux nombres décimaux les règles qui fonctionnent avec les nombres entiers.
- Les élèves ne comprennent pas que les notions de prédécesseur et de successeur n'ont aucun sens pour les nombres décimaux et qu'on toujours intercaler un nouveau nombre entre deux nombres.
- Les élèves comparent les nombres décimaux en comparant la longueur de leur écriture (leur nombre de chiffres).
- Les élèves croient qu'un nombre décimal est composé de deux parties distinctes (disjointes) qu'ils peuvent traiter indépendamment.
- Les élèves confondent dizaine et dixième, centaine et centième.
- Les élèves ne font pas de relation entre la désignation orale et la désignation écrite des nombres décimaux (4 unités et 5 centièmes est écrit 4,5).
- Les élèves ne prennent pas en compte des zéros situés entre la virgule et la partie décimale (ils pensent que les zéros à droite de la virgule sont inutiles :  $24,1 = 24,01 = 24,001$ ).









# 1. Les contraintes des programmes

- a. La progression CM1
- b. La progression CM2

# a. La progression CM1

## *Fractions*

- Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième.
- Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.

## *Nombres décimaux*

- Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème).
- Savoir :
  - . les repérer, les placer sur une droite graduée,
  - . les comparer, les ranger,
  - . les encadrer par deux nombres entiers consécutifs,
  - . passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.

## *Calcul*

- Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.
- Addition et soustraction de deux nombres décimaux.
- Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier.



# b. La progression CM2

## *Fractions*

- Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs.
- Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
- Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions.

## *Nombres décimaux*

- Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000ème).
- Savoir :
  - . les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence,
  - . les comparer, les ranger,
  - . produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,01 ; 0,001...
- Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.

## *Calcul*

- Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux.
- Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.
- Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux.
- Division d'un nombre décimal par un nombre entier.

## 2. Les contraintes didactiques

- a. L'écriture sous forme de quotient.
- b. L'écriture sous forme d'une somme.
- c. L'écriture sous forme d'un produit.



# 5 sens de la fraction

- La proportion
- Rapport ou division-quotition
- Division-partition de la pluralité
- Fractionnement de l'unité
- Rationnel

## i – La proportion

- Les nombres 14 et 5 renvoient à des grandeurs différentes. La fraction désigne une **proportion** et est souvent définie par la formulation « **14 pour 5** ».
- On peut ainsi interpréter  $14/5$  comme :
  - le fait de faire 14 kilomètres en 5 minutes (une vitesse) ou de prendre 2 cuillères de sucre pour 100 grammes de farine (proportion). :

## ii – La division-quotition ou le rapport

Les nombres 14 et 5 renvoient à des grandeurs de même nature. La fraction désigne un **rapport** et est souvent définie par la formulation « **en 14 combien de fois 5 ?** ». Il est lu « **14 divisé par 5** ».

On peut ainsi interpréter  $14/5$  comme :

- la solution de l'équation  $5x = 14$ .
- le quotient décimal de la division de 14 par 5 (ou 14 divisé par 5).

### iii – La division-partition de la pluralité

- Le nombre 14 renvoie à une grandeur alors que le nombre 5 est sans dimension. La fraction désigne une **division-partition de la pluralité** et est souvent définie par la formulation « **14 partagé en 5 parts égales** » et est lu « **le cinquième de 14** ».
- On peut ainsi interpréter  $14/5$  comme :
  - le fait de prendre 14 fois la grandeur-unité et de réaliser ensuite un partage en 5 parts égales.

## iv – Le fractionnement de l'unité

*Le nombre 14 est sans dimension et il opère sur  $1/5$ . La fraction désigne un fractionnement de l'unité et est souvent définie par la formulation « 14 cinquièmes ».*

*On peut ainsi interpréter  $14/5$  comme :*

*- le fait de partager une grandeur-unité en 5 parties égales et d'en prendre 14 morceaux (14 fois  $1/5$  de l'unité)*



# v – Le rationnel

- Le nombre rationnel compris en 2 et 3 qui peut s'écrire  $2,8$ .

# A l'école primaire

- Deux situations de référence conduisent à une utilisation de la fraction telle que définie dans le cas 4 (fractionnement de l'unité) :
- des situations de comparaison conduisant à la mesure de longueur dans lesquelles la fraction prendra un sens que nous désignerons par **rationnel-mesure**.
- des situations de fractionnement conduisant à la mesure d'aire (ou de longueur) dans lesquelles la fraction prendra un sens que nous désignerons par **rationnel-partage**.



# A l'école primaire

Deux situations de référence conduisent à une utilisation du nombre décimal sous cette forme de somme :

- des situations d'approximation de repérage de points sur la droite numérique dans lesquelles le décimal prendra un sens que nous désignerons par **décimal-abscisse**.
- des situations d'approximation de mesure de longueur de segment dans lesquelles le décimal prendra un sens que nous désignerons par **décimal-mesure** et qui engendrent les subdivisions successives de l'unité de mesure.





- Sept situations de référence :
- - Le jeu des segments
- – La droite graduée
- – Les feuilles
- – Les détectives
- – Le carré d'aire donnée
- – Les feuilles blanches
- – L'agrandissement et la réduction d'un puzzle





				Techniques opératoires
P R O G R A M M A T I O N	CM1	Période 1	Séquence 1 : Activités préalables	Addition et soustraction de 2 nombres décimaux  Multiplication d'un décimal et d'un entier et division décimale de 2 entiers  Entretien  Multiplication de 2 nombres décimaux et division d'un nombre décimal par un entier
		Période 2	Séquence 2 : Rationnel mesure – Rationnel partage	
		Période 3	Séquence 3 : Les fractions décimales sous la forme de « Décimal abscisse »	
		Période 4	Séquence 4 : Les nombres décimaux sous la forme de « Décimal abscisse »	
		Période 5	Séquence 5 : Comparer – Encadrer – Intercaler des nombres décimaux	
	CM2	Période 1	Séquence 6 : <u>Entretien</u> ; Rationnel mesure – Rationnel partage – Décimal abscisse	
		Périodes 2 à 4	Séquence 7 : Les nombres décimaux sous la forme de « Décimal mesure »	
		Période 5	Séquence 8 : <u>Vers la 6<sup>ème</sup></u> : la division partage et la division groupements comme autres sens de la fraction.	



# Séquence 2 : Rationnel-mesure / rationnel-partage

- **Objectif de séquence** : Construire deux des sens de la fraction : le « rationnel mesure », un nombre pour comparer des grandeurs et conduisant à la mesure et le « rationnel partage », un nombre pour fractionner l'unité en parts égales et conduisant à la mesure.
- **3 situations de référence** :
  - Le jeu des segments
  - La droite graduée
  - Le jeu des enveloppes

<b>Progression des séances</b> →	<b>SEANCE 1</b>	<b>SEANCE 2</b>	<b>SEANCE 3</b>	<b>SEANCE 4</b>	<b>SEANCE 5</b>
<i>Type de situation</i>	<b>Problème d'apprentis sage</b>	<b>Entraînement</b>	<b>Problème d'apprentis sage</b>	<b>Entraînement</b>	<b>Entraînement</b>
<i>Descriptif de la situation</i>	<b>Jeu des Segments</b>	<b>Jeu de s Segments</b>	<b>Jeu des Segments 2</b>	<b>Jeu des segments 2</b>	<b>Jeu des segments 2</b>
<i>Passerelle vers une autre séance</i>	<b>Séance 3</b>		<b>Séance 6</b>		<b>Séance 8</b>

SEANCE 6	SEANCE 7	SEANCE 8	SEANCE 9
Problème d'apprentissage	Réinvestissement	Réinvestissement	Entraînement
La droite graduée	La droite graduée	La grande droite graduée	Quel est le plus grand ?
Séance 8		Séance 10	

SEANCE 10	SEANCE 11	SEANCE 12	SEANCE 13
Problème d'apprentissage	Entraînement	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entraînement</li> </ul>	Réinvestissement
Les feuilles	Les feuilles	Les feuilles	Jeux de loto, dominos & de memory
Séance 12			

# Le jeu des segments

- Voir fichier Word 1 :
  - jeu des segments
  - jeu des segments 2.

# La droite graduée

- Changement de cadre :

Géométrie ► Graphique



# Les feuilles

- Voir fichier Word 2 : les feuilles.

# Séquence 3 : Décimal abscisse

- Objectifs de séquence :
- - Construire un des sens de la fraction décimale : le « décimal abscisse », un nombre conduisant à l'approximation aussi précise que souhaitée d'un point sur la droite graduée.
- - **Construire l'intérêt de l'écriture d'une fraction en fraction décimale : la simplification des calculs.**
- 1 situation de référence :
- Les détectives 1 & 2

<b>Progression des séances</b> →	<b>SEANCE 1</b>	<b>SEANCE 2</b>	<b>SEANCE 3</b>	<b>SEANCE 4</b>	<b>SEANCE 5</b>	<b>SEANCE 6</b>	<b>SEANCE 7</b>
<i>Type de situation</i>	Problème d'apprentissage	Entraînement	Problème d'apprentissage	Entraînement	Réinvestissement	Réinvestissement	Réinvestissement
<i>Descriptif de la situation</i>	Les détectives	Les détectives	Les détectives 2	Les détectives 2	La droite graduée	Les désignations orales et écrites	Décomposition d'une fraction décimale
<i>Passerelle vers une autre séance</i>	Séance 3		Séance 5				

# Les détectives 1 & 2

- Présentation :
- Détective 1 : C'est une nouvelle situation de communication où une équipe de deux élèves jouent contre toute la classe. Il faut que la classe arrive à encadrer au plus près la fraction choisie par les deux élèves. Cette situation oblige les élèves à expliciter et à justifier leurs calculs. L'obligation de communiquer leurs calculs est le moyen utilisé pour que les élèves réfléchissent à la manière de faciliter leurs calculs et se rendent compte de l'économie cognitive faite lorsqu'ils **choisissent des puissances de 10**. Il s'agit de faire apparaître la fraction comme un nombre et non pas comme un couple d'entiers.
- Détective 2 : Le jeu des détectives est repris avec les élèves avec un affinement de la graduation. Il ne s'agit plus de trouver un encadrement entre deux entiers de la fraction cherchée mais de trouver un encadrement le plus précis possible de cette fraction.

# Séquence 4 : Les nombres décimaux

- Objectifs de séquence :
- - Construire un des sens du nombre décimal : le « décimal abscisse », un nombre conduisant à l'approximation aussi précise que souhaitée d'un point sur la droite graduée.
- - Construire l'intérêt de l'écriture à virgule : la simplification des écritures et plus particulièrement de l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal.
- 1 situation de référence :
- Les détectives 3

<b>Progression des séances</b> →	<b>SEANCE 1</b>	<b>SEANCE 2</b>	<b>SEANCE 3</b>	<b>SEANCE 4</b>	<b>SEANCE 5</b>
<i>Type de situation</i>	Problème d'apprentissage	Problème d'apprentissage	Entraînement	Entraînement	Réinvestissement
<i>Descriptif de la situation</i>	Les détectives 3	Le tableau de numération	Les équivalences entre les fractions décimales et les écritures à virgule	Les désignations orales et écrites	La droite graduée
<i>Passerelle vers une autre séance</i>		Séance 4			

# Les détectives 3

- Présentation :

Le jeu des détectives 2 est repris avec les élèves avec un affinement de la graduation. Il ne s'agit plus de trouver un encadrement le plus précis possible de cette fraction mais de déterminer un encadrement au centième près. Il s'agira d'un jeu à plusieurs équipes de détectives (questionneurs) contre une équipe adverse qui aura choisi la fraction à approximer et qui devra répondre aux questions.

- Objectifs :

- - **Connaître l'écriture à virgule d'un nombre décimal.**
- - Construire l'équivalence entre l'écriture fractionnaire et l'écriture à virgule d'un nombre décimal.

# Séquence 5 : Comparer / Intercaler / Encadrer

- Objectifs de séquence :
- - Savoir comparer deux nombres décimaux ;
- - Savoir intercaler un nombre décimal entre deux nombres entiers.
- - Savoir encadrer un nombre décimal par deux nombres, entiers ou décimaux.
- Pas de situation de référence.



<b>Progression des séances</b> →	<b>SEANCE 1</b>	<b>SEANCE 2</b>	<b>SEANCE 3</b>	<b>SEANCE 4</b>	<b>SEANCE 5</b>
<i>Type de situation</i>	<b>Problème d'apprentissage</b>	<b>Entraînement</b>	<b>Réinvestissement</b>	<b>Réinvestissement</b>	<b>Réinvestissement</b>
<i>Descriptif de la situation</i>	<b>Le jeu des comparaisons</b>	<b>Exercices d'application</b>	<b>Jeux du portrait</b>	<b>Intercaler des nombres</b>	<b>Encadrer un nombre</b>
<i>Passerelle vers une autre séance</i>	<b>Séance 4</b>				

# Séquence 7 : Décimal mesure

- Objectif de séquence :
- Construire un des sens du nombre décimal : le « décimal mesure », un nombre conduisant à l'approximation aussi précise que souhaitée de mesure de longueur de segment et qui engendre les subdivisions successives de l'unité de mesure.
- 1 situation de référence :
  - Le carré d'aire donnée

<b>Progression des séances →</b>	<b>SEANCE 1</b>	<b>SEANCE 2</b>	<b>SEANCE 3</b>	<b>SEANCE 4</b>
<i>Type de situation</i>	Problème d'apprentissage	Entraînement	Réinvestissement	Réinvestissement
<i>Descriptif de la situation</i>	Carré d'aire donnée	Le jeu des segments	Comparer des décimaux	Décomposer des décimaux
<i>Passerelle vers une autre séance</i>	Séance 3			

<b>SEANCE 5</b>	<b>SEANCE 6</b>	<b>SEANCE 7</b>	<b>SEANCE 8</b>
Réinvestissement	Réinvestissement	Réinvestissement	Réinvestissement
			Découvrir la notion d'arrondi
Intercaler des nombres décimaux entre deux nombres, entiers ou décimaux	Les désignations orales et écrites	Encadrer un nombre par deux nombres décimaux	Le nombre le plus proche

# Le carré d'aire donnée

- Présentation :

C'est une situation d'apprentissage où l'élève va découvrir une nouvelle conception du nombre décimal : le décimal mesure qui va servir à approximer de façon aussi précise que voulue la mesure de longueur du côté d'un carré d'aire donnée.

- Objectifs :

- - **Connaître un deuxième sens du concept de fraction décimale : le décimal mesure.**
- - **Utiliser le décimal mesure dans un problème d'approximation de mesure.**

# Séquence 8 : Liens entre les fractions et la division

- Objectifs de séquence :
- - Savoir que la barre de fraction correspond à l'un des deux grands sens de la division : la division-partition ;
- - Savoir que la barre de fraction correspond à l'un des deux grands sens de la division : la division-quotition.
- 2 situations de référence :
- Les feuilles blanches
- Agrandissement et réduction d'un puzzle

Progression des séances →	SEANCE 1	SEANCE 2	SEANCE 3	SEANCE 4	SEANCE 5	SEANCE 6
<i>Type de situation</i>	Problème d'apprentissage	Problème d'apprentissage	Entraînement	Entraînement	Réinvestissement	Réinvestissement
<i>Descriptif de la situation</i>	Les feuilles blanches	Agrandissement ou réduction d'un puzzle	Agrandissement ou réduction d'un puzzle	Agrandissement ou réduction d'un puzzle	Problèmes de division - partition	Problèmes de division - quotient
<i>Passerelle vers une autre séance</i>		Séance 5				

# Les feuilles blanches

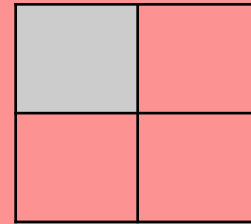
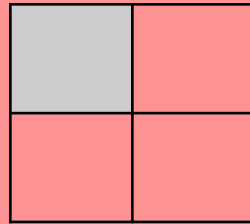
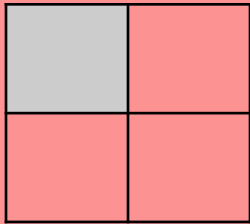
- Présentation :

C'est une situation où les élèves auront à comprendre que 3 divisé par 4 c'est un quart de trois mais c'est aussi trois quarts c'est-à-dire de mettre en œuvre une première équivalence entre la fraction et la division partition.

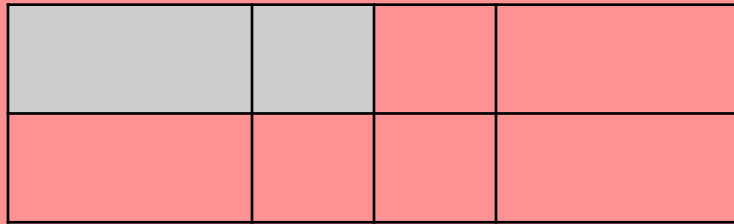
- Objectifs :

- - **Faire acquérir à la barre de fraction l'un des deux grands sens de la division : la division-partition.**
- - **Donner du sens à  $a/b$  dans un contexte de partition de la pluralité :  $a/b$  désigne un  $b$ ème de  $a$ .**
- - **Construire l'équivalence entre la partition de la pluralité et le fractionnement de l'unité : un  $b$ ème de  $a = a/b$ ème.**

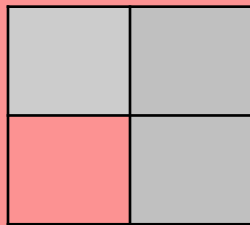




Trois divisé par 4



Un quart de trois



Trois quarts

# Agrandissement et réduction d'un puzzle

- Présentation :

Elle va permettre aux élèves de construire une première équivalence entre la fraction et la division quotient.

## Objectif :

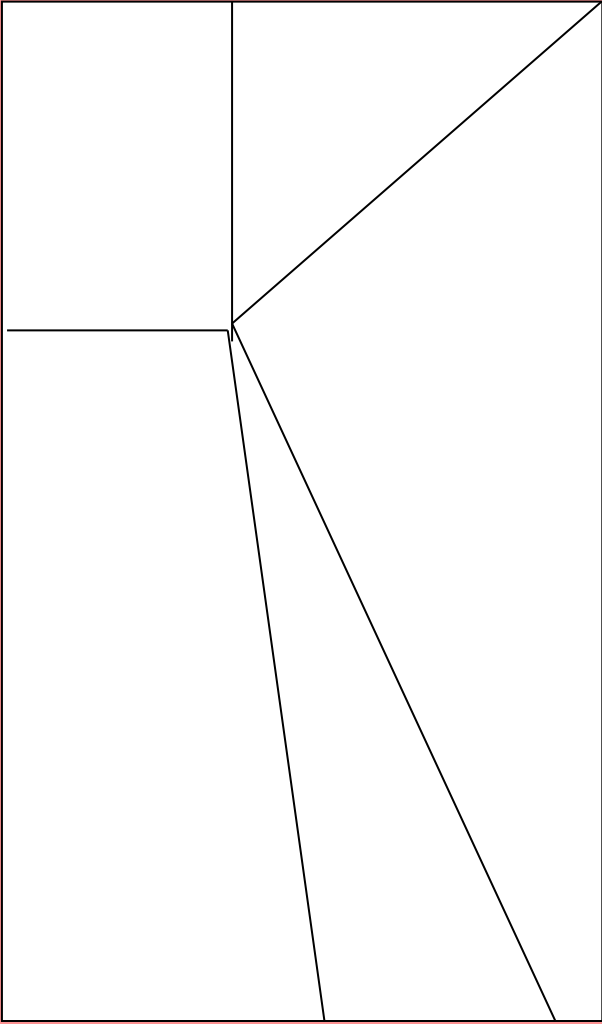
- - Interpréter  $a/b$  comme quotient de l'entier  $a$  par l'entier  $b$ , c'est-à-dire comme le nombre qui multiplié par  $b$  donne  $a$  (programme de 6ème).

6

12

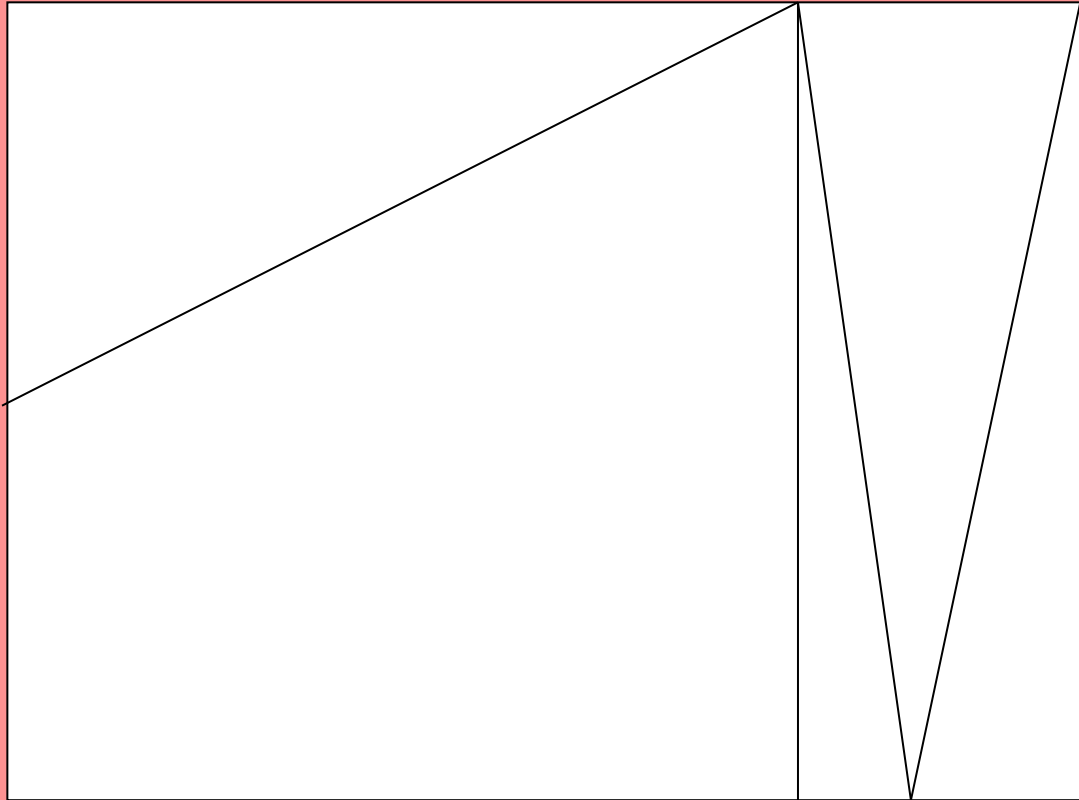
8

16



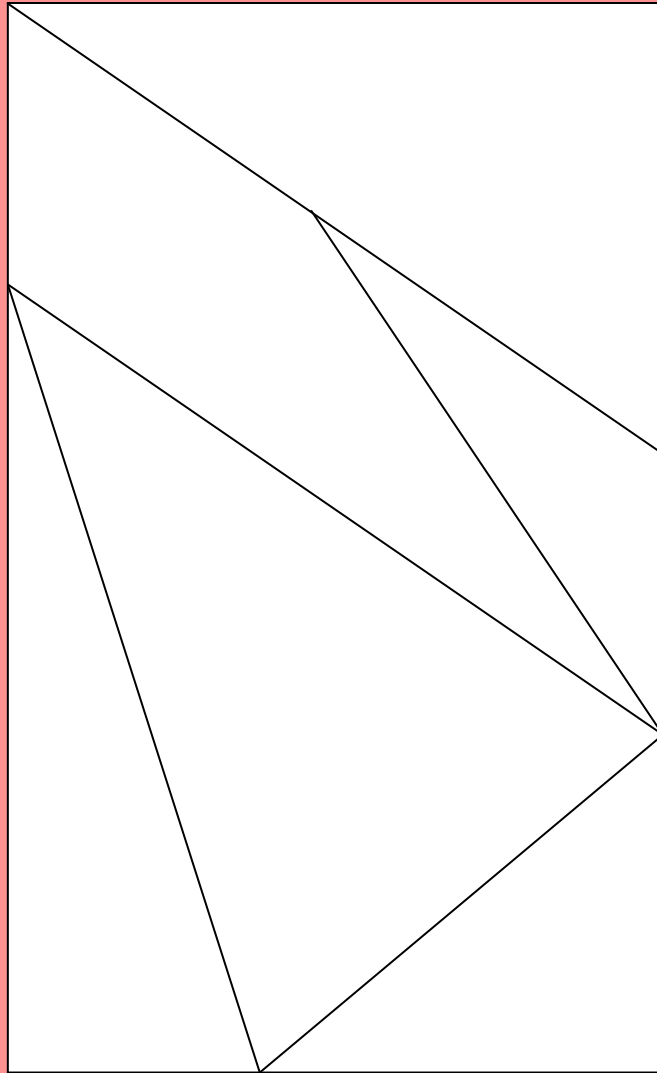
9

9



19

5



8

5

11

6

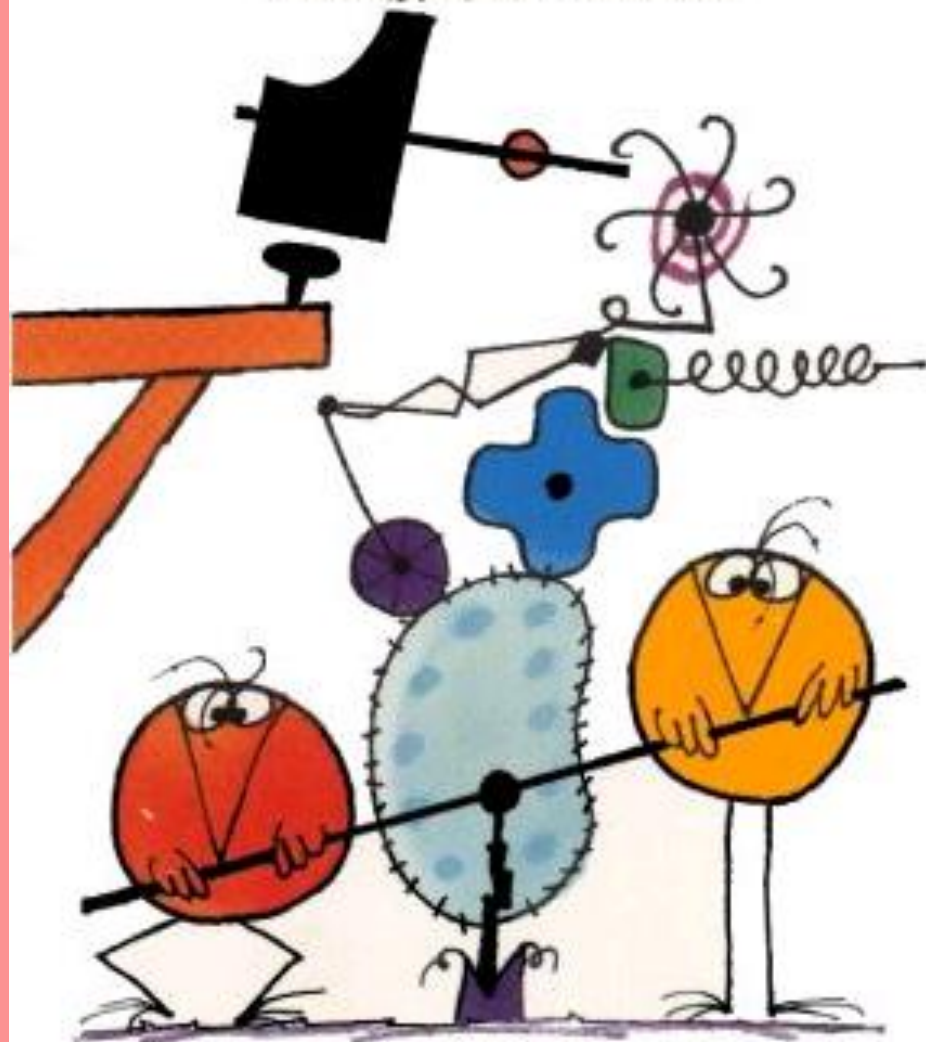
12

# Séquence calcul

- Objectifs de séquence :
- - Savoir additionner, soustraire et multiplier deux nombres décimaux.
- - Savoir diviser un nombre décimal par un entier.
- Pas de situation de référence.

Progression des étapes →	ETAPE 1	ETAPE 2	ETAPE 3	ETAPE 4	ETAPE 4	ETAPE 5	ETAPE 6	ETAPE 7
<i>Descriptif de la situation</i>	Addition de deux nombres décimaux	Soustraction de deux nombres décimaux	Multiplication par 10, 100, 1000.	Multiplication d'un nombre décimal et d'un entier	Division décimale de deux entiers	Entretien	Multiplication de deux nombres décimaux	Division d'un nombre décimal et d'un entier
<i>Activité de l'élève</i>	$4,28 + 3,6$ $15,43 + 2,16$ $38,70 + 9,60$ $23,64 + 35,45$	$7,46 - 3,25$ $9 - 6,4$ $14,7 - 3,65$ $7 - 6,82$ $12,09 - 3,2$	$0,1 \times 10$ $0,01 \times 10$ $0,1 \times 100$ $0,01 \times 100$ $0,1 \times 1000$ $0,01 \times 1000$ $0,3 \times 10$ $0,05 \times 10$ $0,3 \times 100$ $0,05 \times 100$ $0,3 \times 1000$ $0,05 \times 1000$ $7,3 \times 10$ $4,27 \times 10$ $7,3 \times 100$ $4,27 \times 100$ $7,3 \times 1000$ $4,27 \times 1000$	$43,9 \times 5$ $56,87 \times 9$ $5,06 \times 6$ $32,74 \times 4$ $234,7 \times 8$ $302,8 \times 4$ $23,9 \times 3$ $0,9 \times 5$ $0,87 \times 9$ $0,06 \times 6$ $52,74 \times 14$ $234,7 \times 38$ $302,8 \times 25$ $23,9 \times 432$	$36 : 5$ $233 : 2$ $38 : 4$ $3 : 4$ $78 : 10$ $84 : 5$ $300 : 16$ $20 : 80$		$63,9 \times 5,1$ $50,87 \times 9,5$ $5,06 \times 6,7$ $65,24 \times 4,8$ $213,7 \times 0,8$ $32,8 \times 0,4$ $23,91 \times 3,6$ $0,9 \times 5,6$ $0,87 \times 9,87$ $0,06 \times 0,6$	$43,2 : 9$ $40,6 : 7$ $73,5 : 6$ $71,6 : 5$ $96,48 : 4$ $165,55 : 7$ $287,16 : 6$ $430,74 : 9$

Les devises Shadok



Fouxel

POURQUOI FAIRE SIMPLE  
QUAND ON PEUT FAIRE  
COMPLIQUÉ ?!